TALLER 12

① Sea S la porcion en el primer octante del plano $x+y+z=1$ y sea C la frontera de S Orientado de modo antihorario visto desde el punto $(10,10,10)$ Si

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^3+e^x \\ -z^2+y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} \quad \text{Halle} \quad \int_C \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\text{Rot } \vec{F} \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ x^3+e^x & -z^2+y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2z \\ -(0-0) \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paremetricemos S

$z=1-x-y \quad 0\leq x,y\leq 1$
$x=x$
$y=y$

TEOREMA DE STOKES

$$\iint_S (\nabla \times F)\cdot \vec{n}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1 2(1-x-y)\ dx\,dy}$$

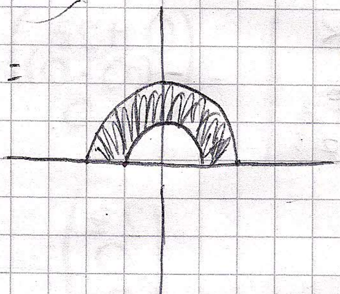
② Sea $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, \; y \geq 0 \}$ y sea

$C = \partial D$ orrentada positivamente para

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{y^3}{3} \\ \frac{x^3}{3} \end{pmatrix} = \begin{matrix} M \\ N \end{matrix}$$

Calcule $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$

D =



Utilizamos teorema de Green

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_D (N_x - M_y)\, dA$$

$M_y = -y^2$

$N_x = x^2$

$$\iint_D x^2+y^2 \, dA$$

~~Parametrizamos~~ D en polares

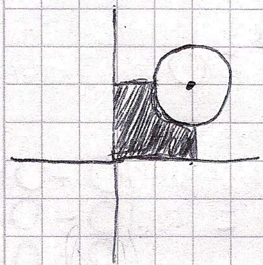
$$\int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \; r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] d\theta = \frac{\pi}{4}(4-1) = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

③ Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 2x + \tan(\tan(y)) \end{pmatrix} = \begin{matrix} M \\ N \end{matrix}$$

Sea C la frontera de la region

$$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 > 1 \end{matrix}$$



$M_y = 1$

$N_x = 2$

Teorema de Green

$$\iint_D N_x - M_y \, dA$$

$$\boxed{\int \int 1 \, dA}$$

$$4 - \boxed{\frac{\pi r^2}{4}}$$

$$\cancel{4 - \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{\frac{16 - \pi}{4}}$$

④ Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifique su respuesta

DD MM AA

a) Existe un campo vectorial $\vec{G}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que el rot $\vec{G}$ = $\begin{pmatrix} x \text{ sen } y \\ \cos y \\ \cancel{z} - xy \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_{\cancel{z}} \\ x \text{ sen} y & \cos y & z - xy \end{vmatrix}$

$\boxed{\text{Note que } \nabla(\nabla \times \vec{F}) = 0}$

$\neq 0 \leftarrow \begin{pmatrix} -x \\ +y \\ x \cos y \end{pmatrix}$

NO EXISTE

b) Si $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ entonces $\nabla \times \vec{r} = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

VERDADERO

c) Si $\vec{r} = -x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ entonces $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

↳ divergencia

$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$-1 + 1 + 1 = \boxed{1}$

FALSO

DD MM AA

D) Si $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+e^x \\ -z^2+y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$

$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4 \text{ y } z \geq 0\}$ y

$P\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4-x^2-y^2 \text{ y } z \geq 0\}$

Entonces

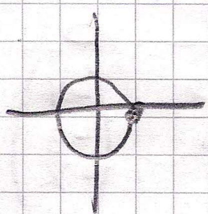
$$\iint_H (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_P (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{S}$$

Si analizamos la integral de linea notamos la Region C y C' correspondiente a cada integral es el mismos por esta razon la afirmacio es VERDADERA

E) Si f tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^3$ y C entonces

cualquier Circunferencia $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$

VERDADERO



Es un circulo ya evaluado desde el punto final al inicial y es el mismo entonces es

$\boxed{0}$

(F) Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ y $Q_x = P_y$ en una region abierta D, entones $\vec{F}$ es conservativo

NO se en que influye que el campo sea abierto

(6) Para todo curva C se cumple se cumple

$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = -\int_{C} f(x,y)\,ds$$

VERDADERO YA QUE lo QUE IFLUYE HAY ES El sentido de la curva C

(H) $\vec{F}(X,Y,Z) = XY\vec{i} + YZ\vec{j} + ZX\vec{K}$ ES un campo conservativo

$\text{Rot } F = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ES conservativo

$$\begin{vmatrix} i & j & K \\ f_x & f_y & f_z \\ XY & YZ & ZX \end{vmatrix} = \begin{matrix} 0-Y \\ -(Z-0) \\ 0-X \end{matrix} \quad \begin{pmatrix}-Y\\-Z\\-X\end{pmatrix}$$

FALSO

Ⓘ $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + 2x\,\vec{k}$ es un campo incompresible, es decir

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = y + z + x \qquad \operatorname{div} \vec{F} \neq 0$$

FALSO

Ⓙ $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + 2x\,\vec{k}$

Falso el $\operatorname{Rot} \vec{F} \neq 0$

⑤ Sea $E = \{(x,y,z) \mid$

$x^2+y^2 \leq z \leq 9-x^2-y^2$

y sea $S = \partial E$ con el normal apuntando hacia afuera para el campo vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ z\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ calcule

TEOREMA DE DIVERGENCIA

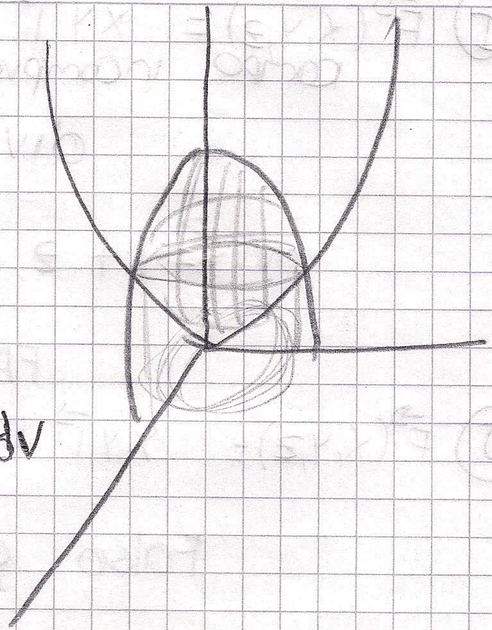
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

$\operatorname{div} \vec{F} = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2+y^2 = 4-x^2-y^2$$

$$2(x^2+y^2) = 4$$

$$x^2+y^2=2$$



$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$$

↳ D es la circunferencia $x^2+y^2=2$

↳ Polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{4-(r^2)} r\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^2\,(4-r^2-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}} 4r^2-2r^4\,dr\,d\theta \quad = \quad 2\pi\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{4r^3}{3}-\frac{2r^5}{5} \quad = \quad \boxed{2\pi\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{5}\right)}$$

⑥ Sea S y $(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2 \quad z \leq 16$

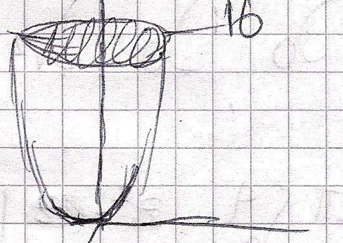
$\vec{F} = \begin{pmatrix} x(z-4) \\ yz \\ x^2 \end{pmatrix}$

Orientado con el normal con la tercera componente ~~positiva~~ negativa

Para $\to$ El $\vec{n}$ hacia abajo

Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$



S_1 = tapa

Hay que ponerle tapa para poder aplicar T. Divergencia

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$\to z = 16$

$\vec{n} = K$

$(z-4) + z + 0$

$2z - 4$

$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^{16} (2z-4) \, dv$$

Parametrización

$z = 16$

$x = x$

$y = y$

$dS = \| r_x \times r_y \| = 1$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^{16} (2z-4)\, dz\, dA - \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

↳ Sombra $x^2+y^2=16$ ↳ $x^2+y^2=16$, $z=16$

POLARES

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{r^2}^{16} 2z-4\, dz\, r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^4 \begin{pmatrix} x(z-4) \\ yz \\ x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dr\, r\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^4 z^2-4z\Big|_{r^2}^{16} r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^4 x^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^4 256-64-r^4+4r^2 - \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3\cos^2\theta\, dr\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^4 (192-r^4+4r^2)\,r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^4 d\theta$$

$$2\pi\int_0^4 192r-r^5+4r^3\, dr - \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\; 64\; d\theta$$

$$2\pi\left[\frac{192r^2}{2}-\frac{r^6}{6}+r^4\right] - 32\int_0^{2\pi} 1+\cos(2\theta)\, d\theta$$

$$2\pi\left[96r^2-\frac{r^6}{6}-r^4\Big|_0^4\right] - 32\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$2\pi\left[1536 - \frac{2048}{3} - 256\right] - \left[32(2\pi) + 0\right]$$

$$2\pi\left[1280 - \frac{2048}{3}\right] - 32\pi$$

$$2\pi\left[\frac{1792}{3}\right] - 32\pi$$

$$\pi\left[\frac{3584}{3} - 32\right]$$

$$\boxed{\pi\left(\frac{3488}{3}\right)}$$

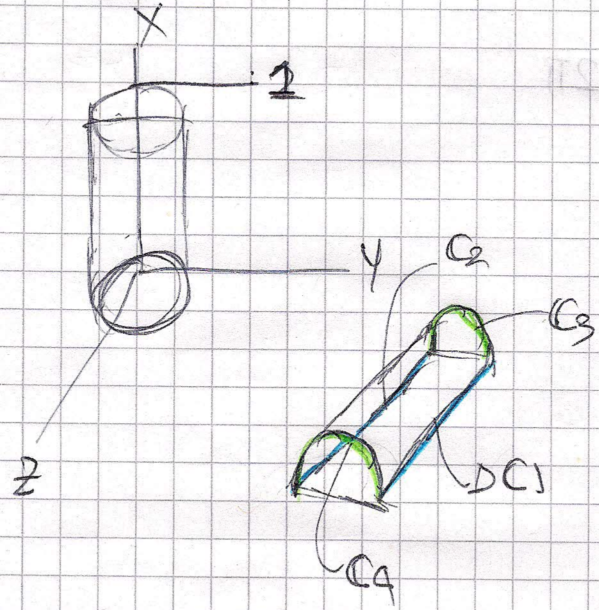
(7) Sea $S = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1, \; 0 \leq x \leq 1, \; z > 0$

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ x(x-1)z^2 \\ x(z^2(x-1)+1) \end{pmatrix}$$

Orientado con normal en la tercera componente positiva para

Halle $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \vec{n}\, dS$ = teorema de Stocks

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \vec{n} \, ds = \int_C \vec{F} \, d\vec{s}$$



C_2 $z = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t$

$r'(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{s} =$$

Es prudente devolvernos a Stocks con cada una de las curvas (C_1, C_2, C_3, C_4) y hacer la integral de línea de cada una parametrizando cada una

8 Sea $S = \{(x,y,z) \mid z = 1-x^2-y^2 \quad z \geq 0\}$

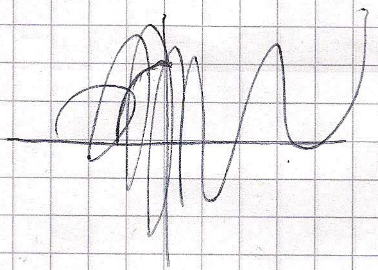
Orientador con normal con la tercera componente positivo

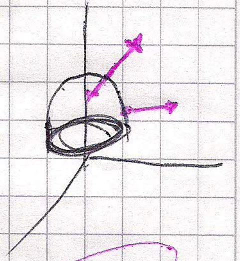
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^3+x^3 \\ z^3 \\ x^5+y^6 \end{pmatrix}$$

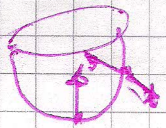
Para

Halle

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F})\, \vec{n}\, ds$$







$z=0$

$x^2+y^2=1$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F})\, \vec{n}\, ds = \int_C \vec{F}\, d\vec{s}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ y^3+x^3 & z^3 & x^5+y^6 \end{vmatrix}$$

$x = \cos\theta$

$y = \operatorname{sen}\theta$

$z=0$

$$= \begin{pmatrix} 6y^5 - 3z^2 \\ 5x^4 - 0 \\ 0 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D (\nabla \times \vec{F})\, \vec{n}\, dS$$

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

$$\iint_D \begin{pmatrix} 6y^5 - 2z^3 \\ -5x^4 \\ -3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_D -3y^2 \; dA$$

$\hookrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$-3\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}^2\theta \; r\,dr\,d\theta$$

$$-3\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \int_0^1 r^3 \, dr\, d\theta$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2\theta) \left[\frac{r^4}{4}\bigg|_0^1\right] d\theta$$

$$-\frac{3}{8}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

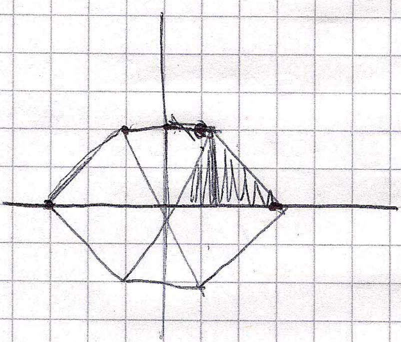
$$-\frac{3}{8}\left[2\pi \quad +\right.$$

$$\boxed{-\frac{3\pi}{4}}$$

9. Calcule la integral de linea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x + e^{\operatorname{sen}(e^y)} \end{pmatrix}$$

a lo largo del hexagono regular con vertices $(2,0)$ $(1,\sqrt{3})$, $(-1,\sqrt{3})$
$(-2,0)$ $(-1,-\sqrt{3})$
$(1,-\sqrt{3})$ el cual esta orientado



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s}$$

$$\frac{b \cdot h}{2}$$

6 triangulos

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$6\sqrt{3}$

10. evaluar la integral

$$\iint_S \left(\nabla \times \begin{matrix} y + e^{\cos(z)} \\ e^{\operatorname{sen}(z)} \\ \frac{e}{2}\, e^{x} \end{matrix} \right) d\vec{s}$$

$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\, d\vec{s} = \int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_{S^2} \nabla\times\vec{F}\, d\vec{s}$$

↳ $z=0$

↳ Disco

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y+e \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ N \\ \ \end{matrix}$$

Parametrización

$x=x$

$y=y$

$z=0$

La componente $z=0$ en el campo y en la parametrización podemos usar green

$$\iint_{S^2} (N_x - M_y)\, dA \qquad M_y = 1,\quad N_x = 0$$

$$\iint_{S^2} (-1)\, dA$$

$$-1\iint_{S^2} dA$$

Area del circulo cuando $z=0$

$x^2+y^2=16$

$$\boxed{-16\pi}$$

11) Encuentre la Integral de flujo

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \, d\vec{S} \quad \text{donde}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi y) e^{2x} + z^2 \\ x^2 \cos(z\pi/2) - \pi \operatorname{sen}(\pi y) e^{2x} \\ 2xz \end{pmatrix}$$

Parametrizado por

$$\vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} (1 - s^{1/3}) \cos(t) - 4s^2 \\ (1 - s^{1/3}) \operatorname{sen}(t) \\ 5s \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le s \le 1 \end{matrix}$$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \, d\vec{S} = \int_C \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_{S^2} \nabla \times \vec{F} \, d\vec{s}$$

$$\hookrightarrow z = 0$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi y) e^{2x} \\ x^2 - \pi (\operatorname{sen}(\pi y)(e^{2x}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ 2\cos(\pi y) e^{2x} & x^2 - \pi \operatorname{sen}(\pi y) e^{2x} & 0 \end{pmatrix}$$